In het paradijs van Cantor: spelen met ∞

Gert Heckman

April 18, 2016

Abstract

Dit is een tekst, gemaakt voor een proefcollege over Wiskunde voor 6 VWO leerlingen, waarin op diverse niveaus met het begrip oneindig zal worden gespeeld.

1 De paradox van Zeno

De onderstaande paradox over Achilles en de schilpad is afkomstig van de Griekse filosoof Zeno van Elea, die leefde in de vijfde eeuw voor Christus.

> De schildpad daagde Achilles uit voor een hardloopwedstrijd. Hij beweerde dat hij altijd zou winnen als Achilles hem een kleine voorsprong gaf. Achilles moest lachen, want hij was natuurlijk een machtig strijder, snel te voet, terwijl de schildpad zwaar en langzaam was.
>
> Hoeveel voorsprong? vroeg hij de schildpad met een glimlach. Tien meter, antwoordde deze. Achilles lachte harder dan ooit. Dan ga jij zeker verliezen, vriend, vertelde hij de schildpad, maar laten we vooral rennen, als je dat graag wilt.
>
> In tegendeel, zei de schildpad, ik zal winnen, en ik kan het je met een eenvoudige redenering bewijzen. Kom op dan, antwoordde Achilles, die al iets minder vertrouwen voelde dan eerst. Hij wist dat hij de superieure atleet was, maar hij wist ook dat de schildpad een scherper verstand had, en dat hij al vaak een discussie met het dier had verloren.

> Veronderstel, begon de schildpad, dat u me een voorsprong van 10 meter geeft. Zou u zeggen dat u die 10 meter tussen ons snel kunt afleggen? Zeer snel, bevestigde Achilles. En hoeveel meter heb ik in die tijd afgelegd, denkt u? Misschien een meter - niet meer, zei Achilles na even nagedacht te hebben. Zeer goed, antwoordde de schildpad, dus nu is er een meter afstand tussen ons. En zou u die achterstand snel inlopen? Zeer snel inderdaad! En toch zal ik in die tijd verder gegaan zijn, zodat u die afstand moet inhalen, ja? Eeh ja, zei Achilles langzaam. En terwijl u dat doet, zal ik weer een stukje verder gegaan zijn, zodat u steeds een nieuwe achterstand moet inlopen, ging de schildpad stug door.
>
> Achilles zei niets. En zo ziet u, elke periode dat u bezig bent uw achterstand in te halen zal ik gebruiken om een nieuwe afstand, hoe klein ook, aan die achterstand toe te voegen. Inderdaad, daar valt geen speld tussen te krijgen, antwoordde Achilles, nu vermoeid. En zo kunt u nooit de achterstand inlopen, besloot de schildpad met een sympathieke glimlach. U heeft gelijk, zoals altijd, besloot Achilles droevig - en gaf de race gewonnen.

Laten we gemakshalve de paradox iets aanpassen, door de schildpad een kleinere voorsprong van 9 decimeter te geven en te blijven veronderstellen dat Achilles 10 keer zo snel loopt als de schildpad. Als Achilles die voorsprong van 9 decimeter heeft ingelopen, dan heeft de schilpad in die zelfde tijd een tiende deel ervan afgelegd, dus 9 centimeter. Heeft Achilles die 9 centimeter afgelegd, dan is de schilpad nog 9 millimeter vooruit, enzovoort. De totale lengte van de weg, die Achilles aflegt tot het moment, dat hij de schildpad zal passeren, is dus gelijk aan

$$0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots = 0,999\cdots$$

in meters. Het probleem van Zeno komt neer op de vraag of we wel mogen veronderstellen dat

$$0,999\cdots = 1$$

hetgeen uit praktische overweging een goed idee lijkt. We besluiten daarom dit te doen. De paradox van Zeno was het tipje van de sluier van het probleem met oneindig voor de wiskunde. In de wiskunde is het symbool ∞ de gebruikelijke afkorting voor oneindig.

2 Natuurlijke, rationale en rëele getallen

Ik begin met het citeren van de eerste paar regels uit het proefschrift van de Nederlandse wiskundige Brouwer uit 1907, getiteld "Over de Grondslagen der Wiskunde", omdat hij in mooie en klare taal uitlegt wat de *natuurlijke getallen* zijn.

> "Een, twee, drie, $\cdots$", de rij dezer klanken (gesproken natuurlijke getallen) kennen we uit ons hoofd als een reeks zonder einde, d.w.z. die zich altijd door voortzet volgens een als vast gekende wet.
>
> Naast deze rij van klankbeelden bezitten we andere volgens een vaste wet voortschrijdende voorstellingsreeksen, zoals de rij der schrifttekens (geschreven natuurlijke getallen) $1, 2, 3, \cdots$.
>
> Deze dingen zijn intuitief duidelijk.

Wiskundigen denken graag economisch en in compacte termen, waarbij een goede transparante notatie essentiëel is. We noteren daarom de collectie $1, 2, 3, \cdots$ van alle natuurlijke getallen met een enkele letter, en daarvoor kiezen we de $\mathbb{N}$ van natuurlijk. De aanname dat n een natuurlijk getal is, schrijven we in onze beknopte notatie als $n \in \mathbb{N}$.

Een positief *rationaal getal* is een getal van de vorm p/q met p en q onderling ondeelbare natuurlijke getallen. Het woord rationaal komt van het Latijnse ratio, wat verhouding betekent. We noteren de collectie van alle positieve rationale getallen met de enkele letter $\mathbb{Q}_+$ van quotient, en de subindex $+$ duidt erop dat we 0 en de negatieve rationale getallen uitsluiten.

Een *reëel getal* x uit het *eenheidsinterval* $(0, 1]$ is een kommagetal van de vorm

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \cdots$$

voor een vrij te kiezen rij $d_1, d_2, d_3, \cdots$ uit de cijfers $0, 1, 2, \cdots, 7, 8, 9$. De rij $d_1, d_2, d_3, \cdots$ heten de decimalen van x. Echter, zoals we van Zeno hebben geleerd, is er een dubbelzinnigheid, die onstaat als vanaf zeker rangnummer alle decimalen gelijk aan 9 zijn of alle gelijk aan 0 zijn. We willen bijvoorbeeld graag

$$0, 122999 \cdots = 0, 123000 \cdots$$

mogen aannemen. Om deze dubbelzinnigheid op te heffen, zullen we niet toestaan dat vanaf een zeker rangnummer alle decimalen gelijk aan nul zijn.

In plaats van $1,000\cdots$ schrijven we dus $0,999\cdots$, waarmee ervoor gezorgd wordt dat de decimale schrijfwijze eenduidig is.

Een positief reëel getal is dan een getal x uit $(0,1]$ met eventueel een natuurlijk getal n daarbij opgeteld. In dat laatste geval schrijven we $n+x$ in decimale notatie met n voor de komma en de decimalen van x achter de komma. De collectie van alle positieve reële getallen zullen we noteren met de enkele letter $\mathbb{R}_+$.

We hebben dus drie soorten van positieve getallen beschreven, te weten natuurlijke, rationale en reële getallen. Compact genoteerd schrijven we

$$\mathbb{R}_+ \supset \mathbb{Q}_+ \supset \mathbb{N}$$

waarbij het symbool $\supset$ betekent *omvat als deel.* De natuurlijke getallen zijn precies die rationale getallen p/q met $q=1$. De positieve rationale getallen zijn precies die positieve reële getallen, waarvoor de decimaalontwikkeling met een zekere periode gaat repeteren. Zo is de decimaalontwikkeling

$$22/7 = 3,142857142857142857\cdots = 0,\overline{142857}$$

repetent met periode 6. Terzijde zij opgemerkt dat $22/7$ een goede benadering is van

$$\pi = 3.1415926535897932\cdots$$

waarvan Archimedes in de derde eeuw voor Christus bewees dat $22/7$ groter is dan π. Hiertoe toonde hij aan dat $22/7$ groter is dan de oppervlakte van een regelmatige veelhoek met 96 zijden, die de eenheidscirkel omschrijft.

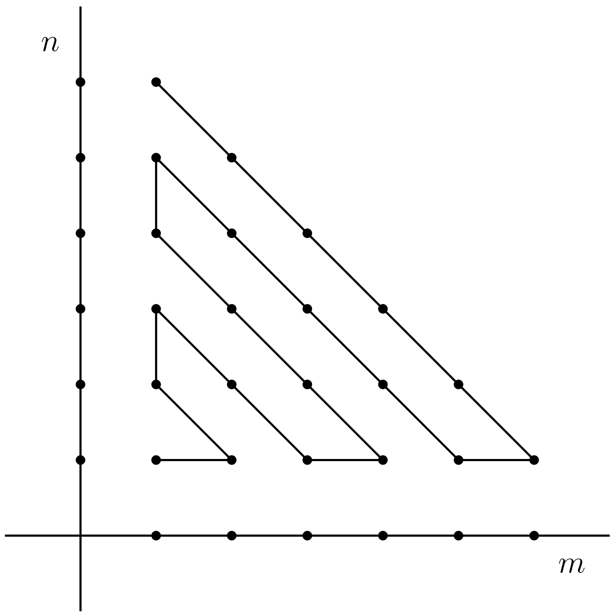
Opgave 2.1. *Bewijs dat* $n\sin(\pi/n)\cos(\pi/n) < \pi < n\sin(\pi/n)/\cos(\pi/n)$.

3 Het Hilbert hotel

Het *Hilbert hotel* is een hotel met oneindig veel kamers genummerd $1,2,3,\cdots$. Het is hoogseizoen, en het hotel is volledig volgeboekt, met steeds één gast per kamer. Een wiskundige komt bij het hotel aan, en vraagt of er nog plaats is. Helaas, we zitten vol, krijgt hij te horen. Na een korte overpeinzing komt hij met een mooi alternatief. Als de persoon in kamer 1 naar kamer 2 doorschuift, en die in kamer 2 naar kamer 3 doorschuift, dus in het algemeen schuift de persoon in kamer n door naar kamer $n+1$, dan is kamer 1 vrij, en pas ik er nog bij. Aldus geschiedde, en ieder was tevreden. We kunnen dit in wiskundesymbolen beknopt formuleren als $1+\infty=\infty$.

De zaken gaan goed met het Hilbert hotel, en de eigenaar overweegt een tweede Hilbert hotel erbij te bouwen. Onder het genoegen van een drankje legt hij zijn plan 's avonds voor aan zijn wiskundige gast uit kamer 1. Na een korte overpeinzing adviseert hij om hier vanaf te zien. Zonde van het geld voor de nieuwbouw. Als het oude Hilbert hotel met kamernummers $1, 2, 3, \cdots$ en het nieuw te bouwen Hilbert hotel met kamers $1', 2', 3', \cdots$ beiden volgeboekt zijn, dan kun je alle gasten van het nieuwe Hilbert hotel ook al in het oude Hilbert hotel onderbrengen door te ritsen. De gast in kamer n van het oude Hilbert hotel schuift door naar kamer $2n - 1$ van het oude Hilbert hotel, terwijl de gast van kamer n' van het nieuwe Hilbert hotel wordt doorgeschoven naar kamer $2n'$ van het oude Hilbert hotel. In onze beknopte wiskundetaal geldt $\infty + \infty = 2 \times \infty = \infty$.

Belust om zijn verdiensten uit te breiden verklapt de hotel eigenaar dat hij zelfs overweegt een hele Hilbert straat te maken, met Hilbert hotels voor ieder straatnummer $1, 2, 3, \cdots$. Zonder verder nadenken adviseert de wiskundige opnieuw negatief.



Noteren we de n-de kamer in het m-de Hilbert hotel met het paar (m, n) dan kun je alle gasten van een volgeboekte Hilbert straat weer eenvoudig onderbrengen in het eerste Hilbert hotel alleen. De gast in kamer $(1, 1)$ blijft zitten, die in kamer $(2, 1)$ verschuift naar $(1, 2)$, die in kamer $(1, 2)$

gaat naar $(1,3)$, die in kamer $(1,3)$ gaat naar $(1,4)$, die in kamer $(2,2)$ gaat naar $(1,5)$, die in kamer $(3,1)$ gaat naar $(1,6)$, die in $(4,1)$ gaat naar $(1,7)$, die in $(3,2)$ gaat naar $(1,8)$, $\cdots$. De manier van doorschuiven is eenvoudig gevisualiseerd in de bovenstaande figuur. In onze beknopte wiskunde taal geldt dus $\infty \times \infty = \infty$.

Kunnen we nu echt niet een groter hotel bouwen, dat we niet vol krijgen met de gasten uit een vol Hilbert hotel?

4 Het diagonaalargument van Cantor

Het bovenstaande argument, dat er evenveel kamers in een Hilbert hotel zijn als in een Hilbertstraat, laat zich eenvoudig aanpassen, om te concluderen dat er in een Hilbert hotel met kamers genummerd met $\mathbb{N}$ evenveel kamers zijn als in een hotel, waarvan de kamers genummerd zijn met $\mathbb{Q}_+$. In de wiskunde zeggen we daarom dat de collectie $\mathbb{Q}_+$ van alle positieve rationale getallen *aftelbaar* is.

Het *Cantor hotel* is een hotel, waarvan de kamers genummerd worden door alle getallen uit het eenheidsinterval $(0,1]$. De vraag, die Cantor zich stelde, was of zijn hotel echt groter was dan het Hilbert hotel, dus of je met alle gasten van een vol Hilbert hotel ook een Cantor hotel kunt vullen. Zijn opmerkelijk stelling was dat dit niet mogelijk is. Het Cantor hotel blijkt echt groter dan het Hilbert hotel.

Stelling 4.1. *Brengen we alle gasten van een vol Hilbert hotel onder in een Cantor hotel, en steeds maar één gast per kamer, dan zullen in het Cantor hotel altijd kamers leeg blijven.*

Stel we brengen de gast uit kamer 1 van het Hilbert hotel onder in kamer x_1 van het Cantor hotel, en die in kamer 2 van het Hilbert hotel in kamer x_2 van het Cantor hotel, en die in kamer 3 van het Hilbert hotel in kamer x_3 van het Cantor hotel, enzovoort. We hebben dan een rij x_n van onderling verschillende getallen uit het eenheidsinterval $(0,1]$. We schrijven de decimaalontwikkeling van deze rij uit

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,d_{11}d_{12}d_{13}\cdots \\ x_2 &= 0,d_{21}d_{22}d_{23}\cdots \\ x_3 &= 0,d_{31}d_{32}d_{33}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Kunnen we een kamer x in het Cantor hotel kiezen, die leeg blijft? Daartoe schrijven we x ook decimaal uit

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \cdots$$

en kiezen we nu $d_1 \neq d_{11}, d_2 \neq d_{22}, d_3 \neq d_{33}, \cdots$ dan verschilt x van ieder van de x_n. We kunnen x op heel veel manieren kiezen. Voor elke decimaal hebben we 9 keuzen, maar we moeten er alleen wel voor zorgen dat er vanaf zeker moment niet louter nullen staan. Dat is makkelijk te regelen door zelfs nooit een nul te kiezen, want dan hebben we voor elke decimaal van x nog steeds minstens 8 keuzen over. Ruime keuze dus!

De bovenstaande redenering is bedacht door de Duitse wiskundige Georg Cantor in 1891, en wordt het *diagonaalargument* van Cantor genoemd [5]. In de beknopte taal van de wiskunde schrijven we $\infty \lneqq 10^{\infty}$, en de collectie $\mathbb{R}_+$ van alle positieve rëele getallen heet *overaftelbaar.* Het eenheidsinterval $(0, 1]$ of de positieve reële getallen $\mathbb{R}_+$ wordt wel het *continuum* genoemd.

5 Irrationale getallen

Reële getallen, die niet rationaal zijn, heten *irrationaal.* Omdat $\mathbb{Q}_+$ aftelbaar en $\mathbb{R}_+$ overaftelbaar is, kunnen we concluderen dat er irrationale positieve reële getallen moeten bestaan, zonder dat we ook maar één voorbeeld van zo'n getal hebben geconstrueerd. Dat is opmerkelijk! We noemen daarom ons argument niet-constructief. De volgende stelling was echter al aan Plato bekend.

Stelling 5.1. *Het getal $\sqrt{2}$ is irrationaal.*

Stel maar dat $\sqrt{2} = p/q$ met $p, q \in \mathbb{N}$ onderling ondeelbaar. Dan is $p^2 = 2q^2$. Dus is p^2 even, maar dan ook p zelf even. Immers het kwadraat van een oneven getal is weer oneven. Zeg $p = 2r$ met $r \in \mathbb{N}$. Substitutie geeft $4r^2 = 2q^2$, en dus $2r^2 = q^2$. Maar dan evenzo $q = 2s$ met $s \in \mathbb{N}$. Dus zijn p en q beiden even, en dat is in tegenspraak met de aanname dat p en q geen deler gemeen hebben. Hiermee is de stelling bewezen.

Een bekend citaat van Plato luidt als volgt.

> Laat niemand, die niet aan wiskunde heeft gedaan, mijn huis binnenkomen.

Plato meende, dat wiskunde als oefening voor de geest onontbeerlijk was, alvorens je kon nadenken over de werkelijke vragen van het leven!

6 De Continuum Hypothese

Nu Cantor had begrepen dat de aftelbare collectie $\mathbb{N}$ van natuurlijke getallen echt kleiner is dan de overaftelbare collectie $\mathbb{R}_+$ van positieve reële getallen, was zijn volgende vraag of er een speciale collectie $\mathbb{X}$ van positieve reële getallen bestaat, die echt groter is dan $\mathbb{N}$ en ook echt kleiner is dan $\mathbb{R}_+$. Met andere woorden, bestaat er een vol hotel met als kamernummers een deelcollectie $\mathbb{X}$ van $\mathbb{R}_+$, dat noch kan ontstaan door de gasten uit een vol Hilbert hotel om te boeken, noch kan worden omgeboekt tot een vol Cantor hotel?

Na diverse vergeefse pogingen om een dergelijk hotel met kamernummers uit $\mathbb{X}$ te vinden, kwam Cantor tot het volgende vermoeden, dat de *continuum hypothese* (CH) werd genoemd.

Vermoeden 6.1. *Er bestaat geen collectie $\mathbb{X}$ van positieve reële getallen, die echt groter is dan $\mathbb{N}$ en echt kleiner is dan $\mathbb{R}_+$.*

7 Transcendente getallen

We starten onze zoektocht naar een tegenvoorbeeld voor de CH door de aftelbare verzameling $\mathbb{Q}_+$ groter te maken. We noemen $x \in \mathbb{R}_+$ algebraisch als x oplossing is van een vergelijking van de vorm

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

met $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$. Hierbij is $\mathbb{Z}$ de verzameling van alle gehele getallen, positief of gelijk 0 of negatief. De letterkeuze komt van het Duitse woord Zahlen. We noteren met $\overline{\mathbb{Q}}_+ \subset \mathbb{R}_+$ de verzameling van alle positieve algebraische getallen. In 1874 bewees Cantor de volgende stelling [4].

Stelling 7.1. *De verzameling $\overline{\mathbb{Q}}_+$ is aftelbaar.*

De bovenstaande vergelijking heet een veeltermvergelijking van graad n. Het is gemakkelijk in te zien dat zo'n vergelijking hoogstens n verschillende oplossingen in $\mathbb{R}_+$ kan hebben. We kunnen dan de verzameling van veelterm vergelijkingen van bovenstaande vorm aftellen door op te merken dat voor iedere $m \in \mathbb{N}$ er hoogstens eindig veel positieve reële oplossingen van een vergelijking als boven met $|a_0| + \cdots + |a_n| + n = m$ zijn. Dit geeft de gewenste aftelling van $\overline{\mathbb{Q}}_+$ door eerder gevonden positieve algebraische getallen te schrappen, wat we ook al eerder deden voor het bewijs van de aftelbaarheid van $\mathbb{Q}_+$. We hebben $\mathbb{Q}_+$ uitgebreid tot $\overline{\mathbb{Q}}_+$ maar hebben nog steeds niet iets echt groters gevonden.

Een $x \in \mathbb{R}_+$, die niet algebraisch is, heet *transcendent*. Opnieuw volgt uit de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}_+$ dat er transcendente getallen bestaan, zonder dat we er ook maar één expliciet hebben opgeschreven.

Het eerste voorbeeld voor een expliciet transcendent getal werd gevonden door Liouville in 1851 [12]. We noteren het product $1 \cdot 2 \cdots n$ met $n!$ en spreken dit uit als n faculteit. Dus $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, \cdots$.

Stelling 7.2. *Het getal* $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.1100010\cdots$ *is transcendent.*

Een veel moeilijker resultaat is de volgende stelling van Lindemann uit 1882 [11].

Stelling 7.3. *Het getal* π *is transcendent.*

Deze stelling gaf tevens de oplossing van de klassieke Griekse vraag naar de *quadratuur van de cirkel*. Inderdaad, met passer en lineaal kun je uitgaande van een lijnstuk van lengte 1 slechts die lengten construeren, die je krijgt door de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen of worteltrekken afwisselend eindig vaak toe te passen met natuurlijke getallen. Maar zo krijg je slechts algebraïsche getallen in $\overline{\mathbb{Q}}_+$. De quadratuur van de cirkel is dus onmogelijk!

Helaas, onze poging om $\mathbb{Q}_+$ te vergroten tot $\overline{\mathbb{Q}}_+$, om zo een tegenvoorbeeld voor de CH te vinden, is mislukt. We vervolgen Cantor op zijn zoektocht naar een tegenvoorbeeld voor de CH door het gesloten eenheidsinterval $(0, 1]$ te verkleinen.

8 De Cantor verzameling

Laten we uit het eenheidsinterval $(0, 1]$ het eenheidsinterval $(1/3, 2/3]$ weg dan houden we over $C_1 = (0, 1/3] \sqcup (2/3, 1]$, waarbij het teken $\sqcup$ staat voor de disjuncte vereniging. Vervolgens laten we uit deze twee gesloten intervallen de twee open intervallen $(1/9, 2/9] \sqcup (7/9, 8/9]$ weg, dan houden we vier intervallen $C_2 = (0, 1/9] \sqcup (2/9, 1/3] \sqcup (2/3, 7/9] \sqcup (8/9, 1]$ over, ieder van lengte 1/9. Opnieuw laten we hieruit de 4 open intervallen

$$(1/27, 2/27] \sqcup (7/27, 8/27] \sqcup (19/27, 20/27] \sqcup (25/27, 26/27]$$

weg en houden dan 8 intervallen $C_3 = \cdots$ over, ieder van lengte 1/27. Dit proces herhalen we, en zo krijgen we een rij

$$C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$$

waarbij C_n een disjuncte vereniging is van 2^n intervallen, die onstaat uit C_{n-1} door weglaten van 2^{n-1} intervallen. We noteren met

$$C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$$

de Cantor verzameling, van al die $x \in (0, 1]$, welke in iedere C_n zitten. Het volgende resultaat van Cantor uit 1883 gaf opnieuw geen tegenvoorbeeld voor de CH [6].

Stelling 8.1. *De Cantor verzameling C is gelijkmachtig met $(0, 1]$.*

Een punt $x \in C$ kunnen we weergeven door een aftelbare rij $x_1, x_2, x_3, \cdots$ waarbij iedere x_n een symbool l (voor links) of r (voor rechts) voorstelt. Is $x_1 = l$ dan kiezen we het deelinterval $(0, 1/3]$. Is voorts $x_2 = r$ dan kiezen we het deelinterval $(2/9, 1/3]$. Is voorts $x_3 = r$ dan kiezen we het volgende deelinterval $(2/27, 1/3]$, enzovoort. Bijvoorbeeld het getal $1/3 \in C$ en wordt uniek gerepresenteerd door de repetente rij $1/3 = lrrr \cdots$.

Opgave 8.2. *Ga na dat ieder punt $x \in C$ uniek gerepresenteerd wordt door een oneindige rij $x_1, x_2, x_3, \cdots$ met x_n gelijk aan l of r, waarbij echter niet is toegestaan dat vanaf zeker rangnummer geldt dat de rij stationair gelijk aan l wordt, met andere woorden er bestaat geen rangnummer m zodat $x_n = l$ voor alle $n \geq m$.*

Opgave 8.3. *Bewijs met behulp van een binaire in plaats van een decimale schrijfwijze dat iedere $x \in (0, 1]$ eenduidig te representeren is in de vorm*

$$x = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots$$

met iedere b_n gelijk aan 0 of 1, alleen niet stationair gelijk aan 0 vanaf een zeker rangnummer. Concludeer dat de Cantor verzameling gelijkmachtig is met het continuum $(0, 1]$.

9 De oplossing van de CH

De zoektocht naar en het niet vinden van de oplossing van de CH bezorgde Cantor de nodige hoofdbrekens. Het probleem werd pas veel later opgelost door het werk van Gödel in 1940 [9] en van Cohen in 1963 [8] met een heel verrassend antwoord.

Stelling 9.1. *Binnen de gebruikelijke axiomas voor verzamelingleer (van Zermelo–Fraenkel) kan de CH noch bewezen noch ontkracht worden: het is een onbeslisbare bewering!*

Het *principe van de uitgesloten derde* - in het Latijn *principium tertium non datur* - zegt dat voot iedere goed gestelde vraag in de wiskunde er maar twee mogelijkheden heeft: waar of niet waar. De bovenstaande stelling laat zien dat dit principe onjuist is voor de CH. Reeds in 1908 had Brouwer het onbepaald geldig zijn in de wiskunde van dit principe scherp bekritiseerd. Volgens Brouwer was het bijvoorbeeld onzeker of de vraag

> Komt in de decimale ontwikkeling van π het cijfer 9 opeenvolgend 99 keer voor?

wel een oplossing heeft. De onbeslisbaarheid van de CH moet Brouwer als een schot in de roos hebben ervaren.

10 Leven en impact van Cantor

Georg Cantor had met zijn verzamelingenleer aanhangers zoals Dedekind en Hilbert. Hilbert was een van de grootste wiskundigen van zijn tijd. In 1900 hield Hilbert een zeer beroemde voordracht op het Internationaal Congres voor Wiskunde in Parijs, waarin hij 23 problemen formuleerde, die hij van fundamenteel belang achtte voor de toekomst van de wiskunde. Het eerste probleem Hilbert 1 was CH. Van de 23 problemen zijn er nog 3 niet opgelost: Hilbert 8 is de Riemann Hypothese (RH) over de optimale fout in de priemgetal stelling, Hilbert 12 over de Kronecker–Weber stelling voor algemene getallenlichemen en Hilbert 16 over de topologie van reële algebraische vlakke krommen.

Maar er kwam ook heel veel kritiek op het werk van Cantor, zeker na het onstaan van de paradoxen. Belangrijke critici waren Kronecker, Brouwer, Weyl (de beste leerling van Hilbert) en Poincaré. De strijd werd gevoerd op het scherpst van de snede, met name tussen Brouwer en Hilbert. De critici vroegen zich af of het werk van Cantor nu wiskunde, dan wel filosofie, dan wel theologie was.

De zware kritiek op zijn wiskundig werk hebben Cantor als mens niet onberoerd gelaten. Meerdere keren is hij opgenomen geweest vanwege ernstige depressies. In 1912 ontving hij wel een eredoctoraat van de Universiteit van St Andrews in Schotland, maar zijn ziekte verhinderde hem dit persoonlijk in ontvangst te nemen. Cantor ging met pensioen in 1913, en zijn laatste levensjaren waren moeilijk: armoede en honger (mede door de eerste wereld oorlog) afgewisseld met opnamen in psychiatrische ziekenhuizen. Hij overleed op 6 Januari 1918 in de leeftijd van 72 jaar oud.

Ondanks de paradoxen is het werk van Cantor de universele taal geworden voor de huidige wiskunde. Zeker na de invloedrijke boekenreeks, geschreven door een briljante groep Franse wiskundigen in het midden van twintigste eeuw onder het pseudoniem Nicolas Bourbaki. Het eerste deel begint niet voor niets met Théorie des Ensembles, om vervolgens grote delen van de wiskunde van daaruit op te bouwen. Onze studenten krijgen in het eerste kwartaal van het eerste jaar een college "Inleiding in de Wiskunde", waarin zij deze taal van Cantor over de verzamelingenleer leren spreken.

Hilbert schreef in 1926 de volgende kernachtige beroemde zin [10].

> Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

en dat is zeker waarheid geworden. De huidige wiskunde heeft ten volle het werk van Cantor als basis geaccepteerd. De wiskunde behelst het bestuderen van verzamelingen met een zekere structuur daarop.

We eindigen deze paragraaf met een mooi citaat van Cantor zelf, waar het voor hem in de wiskunde om draait.

> Das Wesen der Mathematik liegt in ihre Freiheit.

Een uitnodiging aan allen, die op vrijheid gesteld zijn, voor een studie in de wiskunde?

11 Het wezen van de wiskunde

Toen ik enige tijd geleden een lezing hield over dit werk van Cantor, werd na afloop gevraagd naar het nut van deze wiskunde. Zoals ik in de vorige paragraaf al vertelde is de verzamelingenleer van Cantor verplichte kost voor het eerstejaars vak "Inleiding in de Wiskunde", omdat hiermee de basis wordt gelegd voor de taal van de wiskunde, die vanuit hier kan worden opgebouwd. Ik zie daarom de mij gestelde vraag in ruimere zin naar het belang van de wiskunde. Ik laat drie wiskundigen aan het woord en de lezer mag zijn eigen conclusies trekken.

De theoretisch fysicus en Nobelprijs winnaar Eugene Wigner heeft een beroemd artikel geschreven over de *onredelijke effectiviteit van wiskunde voor de natuurkunde*. Wigner is beroemd geworden door zijn toepassingen van de groepentheorie (de wiskundige leer van symmetrie) in de natuurkunde. Wigner ervoer de onredelijke kracht van de wiskunde voor de natuurkunde als een mysterie, waarvoor hij uiteindelijk geen echte verklaring had [13].

In September 2003 werd de conferentie "The Unity of Mathematics" gehouden op Harvard, ter gelegenheid van de 90-ste verjaardag van de grote Russische wiskundige Israel Gelfand. In zijn tafelrede tijdens het conferentiediner sprak Gelfand over

> schoonheid, eenvoud, exactheid en een paar gekke ideeën

als de wezenlijke kenmerken van wiskunde. Hij trok daarbij een parallel tussen wiskunde enerzijds en muziek, dichtkunst en filosofie anderzijds. Dat zijn drie tamelijk verheven onderwerpen, waarbij men liefst niet als eerste wil vragen naar hun nut. Wie kan zich een leven zonder muziek voorstellen? Opnieuw benadrukte Gelfand de adequate taal, die de wiskunde verschaft buiten zijn eigen domein, zoals voor de natuurkunde en de techniek.

De laatste wiskundige, die ik wil aanhalen, is Jan de Boer, voormalig hoogleraar meetkunde aan de Radboud Universiteit. In 1975 heeft hij een college gegeven over de regenboog, met als stille getuige een prachtig dictaat, dat ik in 2005 uit een afvalcontainer (bij onze verhuizing naar de nieuwbouw) van de vergetelheid heb kunnen redden [1]. In de verantwoording schrijft hij over het waarom van dit college.

> De enige rechtvaardiging voor dit college ligt in de imponerende schoonheid van de regenboog. Het college is bedoeld voor hen die een emotionele band hebben met de regenboog en die zijn schoonheid bewonderen. En daar gaat het me om in de wetenschap: ik ben op zoek naar schoonheid. De regenboog heeft geen praktisch nut. Maar wiskunde is universeel. Hetzelfde strooiingsprobleem als dat van de regenboog ontmoet men bij $\cdots$.

References

[1] J. de Boer, De regenboog, Dictaat Radboud Universiteit Nijmegen, 1975.

[2] L.E.J. Brouwer, Over de Grondslagen der Wiskunde, Academisch Proefschrift Universiteit van Asterdam, 1907.

[3] L.E.J. Brouwer, De onbetrouwbaarheid der logische principes, Tijdschrift voor Wijsbegeert **2** (1908), 152-158.

[4] G. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen, J. Reine Angew. Math. **77** (1874), 258-262.

[5] G. Cantor, Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, Jahresbericht de DMV **1** (1890-1891), 75-78.

[6] G. Cantor, Über unendlichen, lineare Punktmannigfaltigkeiten, Math. Annalen **21** (1883), 545-591.

[7] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Annalen **46** (1894), 481-512.

[8] P. Cohen, Set theory and the continuum hypothesis, Dover Publications, 1966.

[9] K. Gödel, The Consistency of the Continuum Hypothesis, Princeton Unversity Press, 1940.

[10] D. Hilbert, Über das Unendliche", Mathematische Annalen **95** (1926), 161-190.

[11] F. von Lindemann, Über die Zahl π, Math. Annalen **20** (1882), 213-225.

[12] J. Liouville, Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques, J. Math. Pures et Appl. **16** (1851), 133-142.

[13] E.P. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics for the natural sciences, Comm. Pure and Applied Math. **13** (1960), 1-14.

Gert Heckman, Radboud University Nijmegen: g.heckman@math.ru.nl